

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Profil real, specializarea științele naturii**

**Clasa a IX-a**

1. În triunghiul  $ABC$ , mediana  $AD$  și bisectoarea  $CE$  se intersectează în  $P$ .  
Notăm  $\{F\} = BP \cap AC$ .  
a) Folosind relația dată de Teorema lui Ceva, demonstrați că  $EF \parallel BC$ .  
b) Demonstrați că triunghiul  $CEF$  este isoscel.
2. Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$ , având latura de lungime 2 cm. Pe laturile acestuia se iau punctele  $M \in BC, N \in AC, P \in AB$  astfel încât  $BM = x, CN = y$  și  $AP = z$ , unde  $x, y, z \in (0, 2)$ .  
a) Calculați aria triunghiului  $ABC$ ;  
b) Calculați ariile triunghiurilor  $PBM, MCN$  și  $PAN$ , în funcție de  $x, y, z$ .  
c) Deduceți că:  $x(2-z) + y(2-x) + z(2-y) < 4$ .
3. a) Demonstrați că  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}, (\forall) a, b \in \mathbb{R}_+, a \neq b$ .  
b) Demonstrați că  $\frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \dots + \frac{1}{1000} > \frac{13}{20}$ .
4. Doi melci  $M_1$  și  $M_2$  au plecat la ora 7 dimineața din punctul A spre punctul B, mergând în linie dreaptă. Viteza lui  $M_1$  este de 12 m / oră. La început  $M_2$  a avut o viteză de 8 m / oră dar, la 2 ore de la plecare s-a suit pe spatele unei broaște țestoase T care plecase tot din A spre B cu viteza de 20 m / oră. Melcul  $M_2$  și broasca T l-au ajuns pe  $M_1$  și după încă 4 ore au ajuns în B. Melcul  $M_2$  a coborât imediat de pe spatele lui T și a plecat din B spre A cu o viteză mai mică de 4 m / oră.  
a) La ce oră  $M_2$  îl ajunge pe  $M_1$  ?  
b) Care este distanța dintre A și B ?  
c) Între ce ore (numere întregi)  $M_1$  l-a întâlnit pe  $M_2$ , care se întorcea din B spre A ?

**Notă:** Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Profil real, specializarea științele naturii**

**Clasa a X-a**

**1.** Rezolvați ecuațiile:

a)  $\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2, x \in \mathbb{R};$

b)  $4^x - 9^x = 10^x - 15^x, x \in \mathbb{R}.$

**2.** Se consideră ecuația  $z^2 + 2i(\cos a) \cdot z - \cos^2 a = 0$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ . Determinați valorile lui  $a$  pentru care ecuația admite soluția  $z = i \cdot \sin a$ .

**3.** a) Demonstrați că  $x - y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R};$

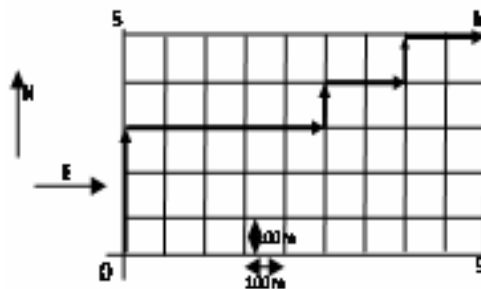
b) Demonstrați că  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ , oricare ar fi numărul natural nenul  $n$

**4.** În desenul alăturat avem o parte din străzile orașului

New York. Oswald se află în  $O(0,0)$  și dorește să ajungă cât mai repede la Mary aflată în  $M(9,5)$ . El trebuie să meargă doar spre nord sau spre est, plecând din  $O$  pe o linie poligonală (ca în figura alăturată)

a) Câți metri trebuie meargă spre est (orizontal) și câți spre nord (vertical) pentru a ajunge în  $M$ ?

b) În câte moduri poate parcurge astfel Oswald drumul din  $O$  în  $M$ ? (Coordonatele punctului  $M$  sunt exprimate în unități de lungime, iar o unitate de lungime este 100 m)



**Notă:** Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Profil real, specializarea științele naturii**

**Clasa a XI-a**

1. Se dau funcțiile  $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$  și
- $$g(x) = x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x - 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right).$$
- a) Calculați  $f'(x)$  și  $g'(x)$ .
- b) Demonstrați că  $f(x) = 2\pi + g(x)$ ,  $\forall x \in [0,1]$
2. Un obiect este lăsat să cadă liber; presupunem că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei pe care o atinge obiectul. Timpul  $t$  (în secunde) necesar pentru ca obiectul să atingă viteza  $v$  (în metri / secundă) este dat de regula  $t(v) = \ln \frac{60+v}{60-v}$ ,  $v \in [0,60)$ .
- a) În cât timp obiectul ajunge de la viteza  $v = 0$  m/s până la viteza  $v = 27,57$  m/s? ( $\ln 2,71 \approx 1$ )
- b) Ce viteză atinge obiectul după 3 secunde? ( $e^3 \approx 19,90$ )
- c) Determinați asimptota verticală a funcției  $t = t(v)$ .

Notă. În calcule se va considera pentru numărul lui Euler  $e$  valoarea aproximativă 2,71, iar numerele vor fi scrise cu două zecimale exacte.

3. În  $M_3(\mathbb{R})$  se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- a) Demonstrați că  $A^3 = O_3$  și  $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$
- b) Calculați  $2 \cdot A + 3 \cdot A^2 + 4 \cdot A^3 + \dots + 2011 \cdot A^{2010}$
- c) Calculați  $(I_3 + A)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și matricea  $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$
- a) Demonstrați că  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ;
- b) Demonstrați că  $X^n(1) = X(2^n - 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Profil real, specializarea științele naturii**

**Clasa a XII-a**

1. Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)e^{-x}$ . Notăm  $A(n)$  aria mulțimii plane mărginită de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x=1$  și  $x=n$ , unde  $n \in (1, \infty)$ .
  - a) Calculați  $A(n)$ .
  - b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n)$ .
2. Calculați:  $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot dx$
3. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t^2} \cdot B$ , iar  $G = \{M_t \mid t > 0\}$ .
  - a) Calculați:  $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$
  - b) Arătați că  $G$  este parte stabilă a mulțimii  $M_2(\mathbb{R})$  în raport cu înmulțirea matricilor.
  - c) Arătați că  $(G, \cdot)$  este un grup abelian.
4. Se dă polinomul cu coeficienți reali  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ .
  - a) Dacă  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  și  $P(1) = -2$ ,  $P(\sqrt{2}) = 0$ , să se rezolve ecuația  $P(x) = 0$ .
  - b) Dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|a|, |b|, |c| \leq 2010$  și există  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $P(x) = 0$ , să se demonstreze că  $x \leq 2010$ .

**Notă:** Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.